Métodos Numéricos
13 de noviembre de 2020
Segundo Parcial

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

- ☐ Completar apellido en las hojas y numerarlas
- ☐ Enviar fotos claras y legibles de la resolución del examen
- ☐ **Justificar <u>todas</u> las respuestas**

Nombre y Apellido
[redacted]

1. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ queremos resolver el problema de encontrar la matriz ortogonal $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que *minimiza* $\|A - BQ\|_F$. Es decir, queremos encontrar una Q ortogonal que nos transforme a B en la matriz más cercana a A posible. Sugerencias para este ejercicio:
   - $\mathrm{tr}(ST) = \mathrm{tr}(TS)$ para cualesquiera $S, T \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
   - $\|S\|_F^2 = \mathrm{tr}(S^tS)$ para cualquier $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
   - Si $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz ortogonal, $|q_{ii}| \leq 1$ para $i : 1, \ldots, n$.

   (a) Probar que el problema planteado en el enunciado se reduce a encontrar la Q ortogonal que *maximiza* $\mathrm{tr}(Q^tB^tA)$. (10 puntos)

   (b) Si $B^tA = U\Sigma V^t$ es una descomposición en valores singulares de B^tA mostrar que el problema se reduce a encontrar la matriz ortogonal P que *maximiza* $\mathrm{tr}(P\Sigma)$. (10 puntos)

   (c) Resolver el problema del ítem anterior y luego hallar la Q que resuelve el problema original. (15 puntos)

2. Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica definida positiva y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible, $b, c \in \mathbb{R}^n$, y sea $\omega \in \mathbb{R}$ una constante positiva. Se desea hallar la solución (x^t, y^t) del sistema

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} \tag{20}$$

   y se propone el siguiente esquema iterativo:

$$\begin{pmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -A^{-1}B \\ 0 & I - \omega B^tA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A^{-1}b \\ \omega B^tA^{-1}b - \omega c \end{pmatrix}$$

   (a) Mostrar que si este esquema converge, lo hace a una solución de (54). (10 puntos)

   (b) Reescribir el esquema expresándolo de la forma $y^{(k+1)} = T\,y^{(k)} + d$ con $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $d \in \mathbb{R}^n$. (10 puntos)

   (c) Sea $B^tA^{-1}B$ una matriz con autovalores positivos y λ_{max} su máximo autovalor. Demostrar que el esquema converge si y sólo si $\omega < 2/\lambda_{max}$. (15 puntos)

3. Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$, con $m \geq n$ y A una matriz de rango máximo. Llamamos $\widetilde{A} = (A\ b) \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ y consideramos $\widetilde{A}^t\widetilde{A} = \widetilde{L}\widetilde{L}^t$ la factorización de Cholesky de $\widetilde{A}^t\widetilde{A}$, siendo

$$\widetilde{L} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ \ell^t & \rho \end{pmatrix},$$

   $L \in \mathbb{R}^{n\times n}, \ell \in \mathbb{R}^n$ y $\rho \in \mathbb{R}$.

   (a) Probar que $\hat{x}$ es solución de cuadrados mínimos del sistema $Ax = b$ si y solo si $\hat{x}$ es solución del sistema $L^tx = \ell$. (14 puntos)

   (b) Probar que ρ es el error cometido en la aproximación. Es decir, si $\hat{x}$ es la solución de cuadrados mínimos del sistema $Ax = b$ entonces $\rho = \|A\hat{x} - b\|_2$. (16 puntos)